Limity posloupností

6. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Poznámka

Pro $x \in \mathbb{R}$ nejsou mj. definovány výrazy $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, $0 \cdot \infty$, $-\infty \cdot 0$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka (Růstová škála)

„Pro $q > 1$ platí, že $n! \gg q^n \gg n^k$."

Definice

Nechť $x \in \mathbb{R}$. (Dolní) celou částí čísla x nazveme největší celé číslo, které je menší nebo rovno x, tedy $[x] = \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z}:\ z \leq x\}$.

Poznámka

Platí, že $\forall x \in \mathbb{R}:\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Tedy například platí:

- $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$
- $\lfloor -5.93 \rfloor = -6$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$
- $\lfloor 5.96 \rfloor = 5$
- $\lfloor -3.01 \rfloor = -4$
- $\lfloor 2 \rfloor = 2$

Pozor:

- $\lfloor a \cdot x \rfloor \neq a \cdot \lfloor x \rfloor$
- $\lfloor x^n \rfloor \neq \lfloor x \rfloor^n$
- $\lfloor x \pm a \rfloor \neq \lfloor x \rfloor \pm a$
- $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor \neq \frac{\lfloor x \rfloor}{a}$
- $\lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor \neq \sqrt[n]{\lfloor x \rfloor}$

Příklady:

1. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \sin n) \left(\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}\right)$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \rfloor$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - \lfloor \sqrt[3]{(n+1)!} \rfloor}{3n^3 - \lfloor \sqrt[3]{n!} \rfloor}$

   h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor \sqrt[3]{n^3-1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n^3+1} \rfloor}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + n^n}}$

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+7)^{50} - \left(n^2-1\right)^{25}}{\sqrt{n^{200} + n^{99} - 1} - \sqrt{n^{100} + 2n^{99} + 1}}$

   j) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^{3n}\sqrt{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

2. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují) - zkoušková složitost:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3+n^2} - n\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} - \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}\right) \frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor \sqrt{n+2} \rfloor}$

* 3. Najděte konkrétní příklady x a a, pro které neplatí rovnosti ze třetí poznámky v teorii.